Гомотетия

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку плоскости X переводит в точку X' так, что $\overline{OX'} = k\overline{OX}$. Гомотетию с центром O и коэффициентом k обычно обозначают H_O^k.

Важно. Гомотетия переводит прямую в параллельную прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, окружность в окружность. А также гомотетия переводит касающиеся объекты в касающиеся (пересекающиеся в пересекающиеся).

Теорема (о центрах гомотетий). Композиция двух гомотетий $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ является гомотетией с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$ и с центром лежащим на прямой O_1O_2, если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, и является параллельным переносом или тождественным преобразованием, если $k_1 \cdot k_2 = 1$.

1. На плоскости даны два неравных треугольника с параллельными соответственными сторонами. Докажите, что существует гомотетия, переводящая один треугольник в другой.

2. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

3. В треугольнике ABC проведена чевиана AA_1. Оказалось, что вписанные окружности треугольников AA_1B и AA_1C равны. Докажите, что и вневписанные окружности этих треугольников, лежащие напротив вершины A, тоже равны.

4. (a) Дана окружность ω. В сегмент, ограниченный хордой AB, вписана окружность, касающаяся ω и отрезка AB в точках M, N. Докажите, что вторая точка пересечения прямой MN и окружности ω делит дугу AB пополам.
(b) Дана окружность ω. Окружность s касается продолжения хорды AB в точке M и окружности ω внешним образом в точке N. Докажите, что вторая точка пересечения прямой MN и окружности ω делит дугу AB пополам.

5. Дан треугольник ABC. Вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Вневписанная окружность касается отрезка BC в точке L. Точка K' лежит на вписанной окружности и диаметрально противоположна точке K. Точка L' лежит на вневписанной окружности и диаметрально противоположна точке L. Докажите, что прямые $K'L$ и KL' пересекаются в точке A.

6. Каждая из окружностей S_1, S_2, S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC, имеющих общую вершину A, B, C соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через A проводятся всевозможные прямые, вторично пересекающие окружности в точках M и N. Докажите, что на плоскости существует точка, равноудаленная от M и N для каждой пары этих точек.

8. Внутри треугольника ABC нарисованы четыре круга одинакового радиуса: ω_A, ω_B, ω_C и s, причем каждый из кругов ω_i касается двух сторон треугольника и s. Докажите, что центр круга s принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

9. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (S_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность S_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (S_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S_1 и S_2, будут параллельны между собой.

10. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, и прямая ℓ касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой ℓ.