

Степень точки. Радикальные оси. Добавка

1. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , AC , BC в точках C_1 , B_1 , A_1 . Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 соответственно параллельны сторонам A_1B_1 и A_1C_1 , а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке. (А что будет, если рассмотреть степень точки относительно окружности нулевого радиуса?).
2. На плоскости даны точка X внутри окружности ω и точка A вне её. Через точку X проводятся всевозможные хорды BC . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC .
3. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B . Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P (отличной от H). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN .
4. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.
5. *Окружность Конвея.* На прямых AB и AC за точку A отложили точки A_1 и A_2 так, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогично построили точки B_1, B_2, C_1, C_2 . Докажите, что шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.
6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается стороны BC в точке A_1 . I_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC . M — середина отрезка A_1I_A . Докажите, что длина касательной из M к ω равна MB .
7. I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Пусть K — точка пересечения перпендикуляра к BI , проведенного в точке I , и прямой AC . Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC .
8. Через точку на медиане AM треугольника ABC проведены окружности ω_B , ω_C , касающиеся прямой BC в точках B, C и пересекающие стороны AB и AC в точках X и Y , всё соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника AXY касается ω_B и ω_C .