Степень точки. Радикальные оси

Определение. Пусть даны точка P и окружность ω. Тогда *степенью точки* P относительно окружности ω называется число $d^2 - R^2$, где d — это расстояние от точки P до центра окружности ω, а R — её радиус (степень точки может быть отрицательной).

Утверждение 1. (a) Пусть точка P лежит вне окружности ω, и через точку P проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке Q, а другая пересекает окружность в точках A и B. Тогда степень точки P относительно окружности ω равна $PA \cdot PB = PQ^2$.
(b) Пусть точка P лежит внутри окружности ω, и через точку P проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Тогда степень точки P относительно окружности ω равна $(-PA \cdot PB)$.

Утверждение 2. Пусть даны две не концентрические окружности ω_1 и ω_2. Тогда геометрическое место точек P, для которых степени относительно обеих окружностей равны, будет прямой, которая перпендикулярна линии центров окружностей ω_1 и ω_2.

Определение. Полученная прямая называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2.

Утверждение 3. Для трех окружностей ω_1, ω_2, ω_3, центры которых не лежат на одной прямой, существует единственная точка такая, что её степени относительно всех трёх окружностей равны.

Определение. Такая точка называется *радикальным центром* окружностей ω_1, ω_2 и ω_3.

Задачи

1. Докажите утверждения 1 и 3 (утверждением 2 можно пользоваться).
2. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром M и радиусом MC проходит через середину AB.
3. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
4. Докажите, что середины отрезков всех общих касательных к двум непересекающимся окружностям лежат на одной прямой.

5. Пусть B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. На продолжениях сторон AB и AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y и BC лежат на одной прямой.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей, построенных на отрезках AA_1 и BB_1 как на диаметрах, проходит через ортоцентр треугольника ABC.

7. Пусть продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD в точке Q.
(a) Докажите, что ортоцентры треугольников BPC, APD, ABQ и CDQ лежат на одной прямой.
(b) *Прямая Гаусса.* Докажите, что середины AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

8. A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Точка P — произвольная. Серединный перпендикуляр к отрезку PA_1 пересекает прямую BC в точке A_2. Угадайте как строятся точки B_2, C_2. Докажите, что A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

9. (a) Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда A_1B_1 первой окружности и хорда A_2B_2 второй окружности. Докажите, что четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$ — вписанный.
(b) *Теорема о бабочке.* Через середину P хорды AB окружности проведены секущие A_1A_2 и B_1B_2. Хорды A_1B_1 и A_2B_2 пересекают хорду AB в точках M и N. Докажите, что $PM = PN$.