

Выпуклые оболочки

Определение. Фигура называется *выпуклой*, если для любых двух её точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком принадлежит фигуре.

Определение. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данную фигуру (в качестве фигуры может выступать конечное множество точек).

Утверждение. Выпуклой оболочкой нескольких точек на плоскости и нескольких произвольных многоугольников является выпуклый многоугольник.

1. На плоскости дано 5 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого многоугольника.
2. На плоскости дано несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.
3. На плоскости дано $n > 4$ точек. Известно, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами выпуклого n -угольника.
4. (a) Докажите, что у любого многоугольника есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри.
(b) Какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n -угольник?
5. На плоскости дано $n \geq 4$ точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что если для любых трех из них найдется четвертая (тоже из данных), с которой они образуют вершины параллелограмма, то $n = 4$.
6. На плоскости дано конечное число точек. Докажите, что из них всегда можно выбрать точку, для которой ближайшими к ней являются не более трех данных точек.