

## Геометрия-1

В задачах считаем, что треугольник  $ABC$  — остроугольный неравносторонний, если не сказано обратное. Точки  $H$ ,  $O$ ,  $I$  — ортоцентр, центр описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$  соответственно.

- Докажите, что точка  $H$ , отраженная относительно стороны  $BC$ , попадает в точку на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
    - Докажите, что точка  $H$ , отраженная относительно середины  $BC$ , попадает в точку на описанной окружности треугольника  $ABC$ , причем диаметрально противоположную  $A$ .
  - Обозначим через  $B_1$  и  $C_1$  — основания высот треугольника  $ABC$ , опущенных из вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Пусть описанные окружности треугольника  $ABC$  и треугольника  $AB_1C_1$  пересекаются в точке  $K$ , отличной от  $A$ . Докажите, что прямая  $KH$  делит сторону  $BC$  пополам.
  - Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон соответственно  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$ . Докажите, что ортоцентры треугольников  $AKN$ ,  $BKL$ ,  $CLM$  и  $DMN$  являются вершинами параллелограмма.
  - $B_1$  и  $C_1$  — основания высот треугольника  $ABC$ , опущенных из вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Обозначим точку пересечения отрезков  $B_1C_1$  и  $AH$  за  $P$ , а точку пересечения прямых  $AO$  и  $BC$  за  $Q$ . Пусть  $M$  — середина  $BC$ . Докажите, что прямые  $HM$  и  $PQ$  параллельны.
- 
- Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $A$  на биссектрисы внутренних и внешних углов  $B$  и  $C$ , лежат на средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной  $BC$ .
  - Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Пусть точки  $M$  и  $N$  — середины  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что прямые  $CI$ ,  $KL$  и  $MN$  пересекаются в одной точке.
  - В треугольнике  $ABC$  ( $AB > BC$ ) проведены биссектриса  $BL$  и медиана  $BM$ . Прямая, проходящая через  $M$  параллельно стороне  $AB$ , пересекает  $BL$  в точке  $D$ . Прямая, проходящая через  $L$  параллельно стороне  $BC$ , пересекает  $BM$  в точке  $E$ . Докажите, что  $ED \perp BD$ .
  - $ABC$  — равнобедренный треугольник ( $AB = BC$ ). Средняя линия, параллельная  $BC$ , пересекает вписанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $K$ , не лежащей на стороне  $AC$ . Докажите, что касательная к вписанной окружности в точке  $K$ , сторона  $AB$  и биссектриса угла  $C$  пересекаются в одной точке.