

Геометрия-1

В задачах считаем, что треугольник ABC — остроугольный неравносторонний, если не сказано обратное. Точки H , O , I — ортоцентр, центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно.

- (а) Докажите, что точка H , отраженная относительно стороны BC , попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC .

(б) Докажите, что точка H , отраженная относительно середины BC , попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC , причем диаметрально противоположную A .
 - Обозначим через B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC , опущенных из вершин B и C соответственно. Пусть описанные окружности треугольника ABC и треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке K , отличной от A . Докажите, что прямая KH делит сторону BC пополам.
 - Точки K , L , M и N — середины сторон соответственно AB , BC , CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что ортоцентры треугольников AKN , BKL , CLM и DMN являются вершинами параллелограмма.
 - B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC , опущенных из вершин B и C соответственно. Обозначим точку пересечения отрезков B_1C_1 и AH за P , а точку пересечения прямых AO и BC за Q . Пусть M — середина BC . Докажите, что прямые HM и PQ параллельны.
-
- Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на биссектрисы внутренних и внешних углов B и C , лежат на средней линии треугольника ABC , параллельной BC .
 - Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Пусть точки M и N — середины AB и BC соответственно. Докажите, что прямые CI , KL и MN пересекаются в одной точке.
 - В треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены биссектриса BL и медиана BM . Прямая, проходящая через M параллельно стороне AB , пересекает BL в точке D . Прямая, проходящая через L параллельно стороне BC , пересекает BM в точке E . Докажите, что $ED \perp BD$.
 - ABC — равнобедренный треугольник ($AB = BC$). Средняя линия, параллельная BC , пересекает вписанную окружность треугольника ABC в точке K , не лежащей на стороне AC . Докажите, что касательная к вписанной окружности в точке K , сторона AB и биссектриса угла C пересекаются в одной точке.