Теорема Виета

1. Числа x, y, z удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно a.

2. На параболе $y=x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

3. Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=0$. Докажите, что $2a^4+2b^4+2c^4$ — квадрат целого числа.

4. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $p_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

5. Пусть имеются два упорядоченных набора чисел $x_1<x_2<\ldots<x_7$ и $y_1<y_2<\ldots<y_7$. Известно, что $x_1<y_1$ и суммы k-ых степеней равны для всех k от 1 до 6. Докажите, что $x_7<y_7$.

6. Про действительные числа $a\leqslant b\leqslant c$ известно, что $a+b+c=2$ и $ab+bc+ca=1$. Докажите, что $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{3}\leqslant b\leqslant 1\leqslant c\leqslant \frac{4}{3}$.