Алгебраический разнобой

Простые задачи

1. На плоскости выбраны пять различных точек с целыми координатами. Докажите, что можно выбрать две из них так, чтобы середина отрезка между ними также имела целые координаты.

2. Петя выбрал два натуральных числа, возвел их в квадрат и сложил. Последние две цифры его результата — 27. Докажите, что он ошибся.

3. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что уравнение $(f(x))^2-4=0$ имеет хотя бы 3 корня. Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет два корня.

4. Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}<1$.

5. Докажите, что из любой бесконечной арифметической прогрессии натуральных чисел можно убрать некоторые члены так, чтобы осталась бесконечная геометрическая прогрессия.

Просто задачи

6. Найдите все x, при которых уравнение $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ имеет решение относительно z при любом вещественном y. *Округ, 2003, 10.5*

7. Натуральное число b назовём *удачным*, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010. *Регион, 2010, 10.4*

8. Положительные числа x_1, x_2, …, x_{2009} удовлетворяют равенствам $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=x_2^2-x_2x_3+x_3^2=\ldots=x_{2008}^2-x_{2008}x_{2009}+x_{2009}^2=x_{2009}^2-x_{2009}x_1+x_1^2$. Докажите, что числа $x_1,x_2,\ldots,x_{2009}$ равны. *Регион, 2009, 10.7*

9. Ненулевые числа a, b, c таковы что любые два из трёх уравнений $ax^{11}+bx^4+c=0$, $bx^{11}+cx^4+a=0$, $cx^{11}+ax^4+b=0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень. *Регион, 2011, 10.4*

10. Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы. *Округ, 2004, 9.4*