Планиметрический разнобой

Прямая Эйлера

1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, A_1 — середина стороны BC. Докажите, что $AH = 2OA_1$.

2. Докажите, что в треугольнике ABC точка пересечения высот H, точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. H_A и H_B — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $H_AH_B = AB$.

Радикальные оси

Определение. Величина $OA^2 - r^2$ называется *степенью точки* A относительно окружности с радиусом r и центром O.

4. (a°) Докажите, что геометрическое место точек с равными степенями относительно двух неконцентрических окружностей есть прямая, перпендикулярная их линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.

(b°) Докажите, что радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трёх окружностей.

5. (a) Докажите, что радикальная ось делит отрезок общей касательной двух окружностей пополам.

(b) В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая — в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

6. AB — диаметр окружности ω, C — точка на ней же. Окружность с центром в точке C касается прямой AB в точке D и пересекает ω в точках E, F. Докажите, что отрезок EF точкой пересечения делит отрезок CD пополам.

7. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

Разнобой

8. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке M.
(a) Докажите, что M лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B.
(b) Докажите, что A, C, M и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

9. В параллелограме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Окружность, проходящая через точки A, O и B касается стороны BC. Докажите, что описанная окружность $\triangle BOC$ касается CD.

10. В правильном треугольнике ACB на стороне AC взяли такие n различных точек P_i, $i = 1, \ldots, n$ так, что $AP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_{n-1}P_n = P_nC$. На стороне BC выбрана такая точка K, что $P_1K \parallel BA$. Покажите, что $\sum_{i=1}^{n} \angle BP_iK = 30^\circ$.

11. (a°) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны лежит на описанной окружности треугольника ABC, и диаметрально противоположна вершине треугольника.
(b) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

12. *Лемма Архимеда.* Окружность s_1 касается окружности s внутренним образом в точке N. Хорда AB окружности s касается окружности s_1 в точке M. Докажите, что MN делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.

13. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. Пусть M и N — центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM = KN$.