

Тренировочная олимпиада — 2, 10 класс

1. Даны $n + 1$ попарно различных натуральных чисел, меньших $2n$ ($n > 1$). Доказать, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.
2. Найдите все такие пары чисел (p, q) , что каждое из уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - qx + p = 0$ имеет два различных натуральных корня.
3. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?
4. В окружности с центром O проведена хорда AB и радиус OK , пересекающий её под прямым углом в точке M . На большей дуге AB окружности выбрана произвольная точка P , отличная от середины этой дуги. Прямая PM вторично пересекает окружность в точке Q , а прямая PK пересекает AB в точке R . Докажите, что $KR > MQ$.

Окружной тур в это воскресенье, 7 декабря. Не продолжайте!

Тренировочная олимпиада — 2, 11 класс

1. Натуральное число a имеет ровно четыре различных натуральных делителя (включая 1 и a). Натуральное число b имеет ровно шесть различных натуральных делителей (включая 1 и b). Может ли число $c = ab$ иметь ровно пятнадцать различных натуральных делителей (включая 1 и c)?
2. На экране компьютера число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?
3. Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R . Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB , а $\angle KXA = \angle NXB = 60^\circ$. Найдите длину отрезка KN .
4. Известно, что A — наибольшее из чисел, являющихся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 2011. На какую наибольшую степень тройки делится число A ?

Окружной тур в это воскресенье, 7 декабря. Не продолбайте!