Функция Эйлера

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

Также считается $\varphi(1) = 1$.

1. Найдите $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое, а α — натуральное.

2. Докажите *мультипликативность* функции Эйлера: если m и n — взаимно простые числа, то

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n.$$

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Докажите равенство

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(Одно из решений использует формулу включений-исключений.)

4. Решите уравнения

$$\varphi(x) = 2; \qquad \varphi(x) = 8; \qquad \varphi(x) = 12; \qquad \varphi(x) = 14.$$

5. Известно, что $(m, n) > 1$. Что больше — $\varphi(m \cdot n)$ или $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$?

6. Докажите **Тождество Гаусса:**

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Суммирование здесь ведется по всем натуральным d таким, что $d \mid n$, то есть по всем делителям числа n.

7. **Теорема Эйлера.** Если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

8. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

9. Даны числа a, b, m, причем $(a, m) = 1$. Найдите корень сравнения $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$.

10. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

11. Докажите, что для любого числа n найдется число, делящееся на n, сумма цифр которого равна n.

12. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.