В траве сидел кузнечик...

На окружности отмечено n точек. В одной из точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по часовой стрелке на b точек (через $b-1$ точек на b-ю).

0. Докажите, что через некоторое количество прыжков кузнечик окажется в точке, в которой уже бывал.

1. Докажите, что первая точка, в которой кузнечик побывает дважды — это начало пути кузнечика.

2. В отмеченных точках растет травка. Сколько травки сможет съесть кузнечик? Каким должно быть число b, чтобы кузнечик съел всю травку на окружности?

Определение. Пусть есть два целых числа a и b и натуральное число n. Числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если $(a-b)$ делится на n. Пишут

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Если b — число от 0 до $n-1$, то говорят, что *a имеет остаток b по модулю n.*

3. Докажите утверждения: *(пункты сдаются одновременно)*
(a) $a \equiv a \pmod{n}$;
(b) $a \equiv b \pmod{n} \ \Rightarrow\ b \equiv a \pmod{n}$;
(c) $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n} \ \Rightarrow\ a \equiv c \pmod{n}$;
(d) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \ \Rightarrow\ a + c \equiv b + d \pmod{n}$;
(e) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \ \Rightarrow\ ac \equiv bd \pmod{n}$;
(f) В каких случаях $ac \equiv bc \pmod{n} \ \Rightarrow\ a \equiv b \pmod{n}$?

4. Для каких a и b у сравнения $ax \equiv b \pmod{n}$ найдётся решение x? Опишите все решения этого сравнения.

5. Найдите остаток от деления 3^{2014} на 14.

6. Сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

7. Докажите, что $1^{101} + 2^{101} + \cdots + 2013^{101}$ делится на 1007.

8. Докажите, что нет такого числа в последовательности $11, 111, 1111, 11111, \ldots$, которое является квадратом целого числа.

9. Даны целые числа a, b, c такие, что $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 6.

10. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

11. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

12. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдется число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы, и которое делится на d.

13. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.