Неравенства

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Тогда

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

причем равенства достигаются только в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1. Докажите неравенства для $x, y > 0$. *Пункты сдаются одновременно.*
(a) $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$; (b) $0.5(x^2 + y^2) \geqslant xy$; (c) $2x + 3/8 \geqslant \sqrt[4]{x}$.
Когда достигаются равенства?

2. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

3. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

4. Докажите неравенство для положительных a, b, c:
(a) $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$; (b) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$.

5. Что больше: $\sqrt{2013} + \sqrt{2015}$ или $2\sqrt{2014}$?

6. Для положительных a и b докажите, что $(a + b)\sqrt{(a + b)/2} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

Smoothing

7. Сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1. Докажите, что
(a) $(1 + a_1) \cdot (2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_n) \leqslant 2 \cdot n!$;
(b) $\dfrac{(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant (n - 1)^n$.

8. Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательные. Докажите, что

$$\frac{1 - x_1}{1 + x_1} \cdot \frac{1 - x_2}{1 + x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - x_n}{1 + x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

9. *Неравенство Гюйгенса.* Пусть a_1, a_2, …, a_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$\sqrt[n]{(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$