Ряды Фарея

Определение. *Ряд Фарея* F_n — это последовательность всех рациональных чисел на $[0;1]$ со знаменателем не больше n, упорядоченных по возрастанию.

$$F_1 = \left\{\tfrac{0}{1},\, \tfrac{1}{1}\right\}, \quad F_2 = \left\{\tfrac{0}{1},\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{1}\right\}, \quad F_3 = \left\{\tfrac{0}{1},\, \tfrac{1}{3},\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{2}{3},\, \tfrac{1}{1}\right\},$$
$$F_4 = \left\{\tfrac{0}{1},\, \tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{3},\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{2}{3},\, \tfrac{3}{4},\, \tfrac{1}{1}\right\}, \quad F_5 = \left\{\tfrac{0}{1},\, \tfrac{1}{5},\, \tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{3},\, \tfrac{2}{5},\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{3}{5},\, \tfrac{2}{3},\, \tfrac{3}{4},\, \tfrac{4}{5},\, \tfrac{1}{1}\right\}.$$

Замечание. Фраза «дробь $\frac{x}{y}$ в ряду Фарея F_n» подразумевает, что дробь несократимая.

1.° Докажите, что две различные несократимые дроби $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$ никогда не могут стоять рядом в ряду Фарея (не считая $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$).

Определение. Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ называется *медиантой* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

2. Докажите, что медианта двух дробей всегда находится между ними. (Рассматриваются только положительные дроби.)

3.° Пусть две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ стоят рядом в ряду Фарея F_n. Докажите, что $b+d > n$.

4.° Докажите, что расстояние между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не меньше $\frac{1}{bd}$.

5. (a°) Пусть дробь $\frac{x}{n}$ располагается в ряду Фарея F_n между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Докажите, что

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by} \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} - \frac{x}{y} = \frac{1}{yd}$$

(b°) Докажите, что для любых двух соседних дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ в ряду Фарея выполнено $bc - ad = 1$.

(c) Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две дроби между 0 и 1, причем $bc - ad = 1$. Докажите, что в некотором ряду Фарея эти дроби соседние.

6. Каково (a) максимальное и (b) минимальное расстояние между соседними дробями в F_n?

7. Все дроби со знаменателями p, q и $p+q$ (p и q взаимно просты, дроби не обязательно несократимые) упорядочили по возрастанию. Докажите, что все знаменатели на нечетных местах равны $p+q$.

° Этим символом отмечены задачи и пункты, являвшиеся частью лекции. Сдавать их нельзя.