Раскраски и разрезания

1. Квадрат 4×4 разделен на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в черный и белый цвета так, чтобы у каждой черной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один черный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

2. Клетки доски 10×10 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Каждые две клетки с общей стороной раскрашены в разные цвета. Известно, что красных клеток 20.
(a) Докажите, что из доски всегда можно вырезать 30 прямоугольников, каждый из которых состоит из двух клеток — белой и синей.
(b) Приведите пример раскраски, когда можно вырезать 40 таких прямоугольников.
(c) Приведите пример раскраски, когда нельзя вырезать больше 30 таких прямоугольников.

3. При каких n можно раскрасить в три цвета все ребра n-угольной призмы (основания призмы — n-угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трех цветов?

4. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в 2014 цветов (каждая клеточка — в один из цветов). Докажите, что найдутся четыре клеточки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам клеточек.

5. Назовем *крокодилом* шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на m клеток по вертикали или по горизонтали, и потом на n клеток в перпендикулярном направлении. Докажите что для любых m и n можно так раскрасить бесконечную клетчатую доску в два цвета (для каждых конкретных m и n своя раскраска), что всегда две клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

6. Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?

7. Из квадратной клетчатой доски $n \times n$, где n — нечетное, вырезали одну угловую клетку. Можно ли полученную фигуру полностью уложить фигурками домино так, чтобы в укладке было поровну горизонтально и вертикально расположенных домино?