Инварианты и полуинварианты.

1. Можно ли составить квадратную таблицу из 2014×2014 чисел так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце — отрицательной?

2. Над числами $1, 2, \ldots, 2014$ можно проводить следующую операцию: к двум из 2014 чисел прибавить по единице. Можно ли с помощью таких операций сделать все числа равными?

3. На плоскости лежат три шайбы. Хоккеист бьет по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 2015 ударов?

4. Конечное множество точек плоскости таково, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками, так что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменять любую пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырехугольника $ACBD$. В полученной системе отрезков разрешается произвести подобную замену и т. д. Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?

5. В компании из 20 человек среди любых трех есть двое незнакомых. Докажите, что в этой компании не более 100 пар знакомых.

6. В каждой клетке квадратной таблицы 4x4 стоит “+” или “−”. За один ход можно поменять знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

---

7. В каждой клетке квадратной таблицы 4x4 стоит “+” или “−”. За один ход можно поменять знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

(а)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

(б)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	+

(в)

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

8. В клетках главной диагонали шахматной доски стоят фишки. За один ход две фишки передвигаются, причем одна на клетку вправо, а другая - на клетку вверх. Могут ли через несколько ходов фишки расположится прямоугольником 2×4 (прямоугольник находится в любом месте доски).

9. В клетках таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.

10. Есть два больших сосуда. В одном из них — 1л спирта, а в другом — 1л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60–процентный раствор спирта в том сосуде, где была вода?

11. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). По трое хамелеоны не встречаются. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

12. В семи вершинах кубика стоят $+1$, а в восьмой вершине стоит -1. Разрешается прибавлять по 1 к концам любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы после нескольких таких операций все числа в вершинах куба делились на 3?

13. На плоскости даны N синих и N красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести N непересекающихся отрезков, каждый из которых соединял бы красную точку с синей.

14. По кругу написано несколько чисел. Если для некоторых идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

15. В ряд расположены 10 карточек, на которых написаны десять попарно различных чисел. За один ход разрешается взять любую карту и переложить ее на любое место в этом ряду. Докажите, что за 6 ходов всегда можно добиться того, чтобы числа на карточках располагались по порядку (возрастая или убывая).

16. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

17. Какое наибольшее количество полей можно отметить на шахматной доске так, что с любого из отмеченных полей до любого можно дойти конем за один или два хода?

18. На фестивале патриотической песни каждая песня оскорбляет не более, чем 3 других участников. После того, как участник исполнил песню, он уезжает домой. Докажите, что можно распределить очередность участников так, чтобы каждый выслушал не более 3 оскорблений.

19. В парламенте у каждого депутата не более 3 врагов. Докажите, что можно разбить парламент на 2 палаты так, чтобы в одной палате у каждого было не более одного врага.

20. В стране 100 городов и 197 ревизоров. Из каждого города ведут 3 дороги так, что по дорогам можно доехать из любого города в любой другой. За один день некоторые 3 ревизора из одного города перемещаются в соседние города. Докажите, что через несколько дней для любого города либо в нем либо во всех соседних будет ревизор.

21. По кругу расставлено 999 натуральных чисел. За один ход каждое число заменяется на НОД своих соседей. Докажите, что рано или поздно все числа станут равными.

22. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,..., 100. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно числа расположаться по порядку 1, 2,..., 100.

23. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах – k-ой и $(k+1)$-ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.