

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Если в N клетках сидит не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k+1$ кролик.

Если сумма n чисел равна S , то среди них есть как число не большее S/n , так и число, не меньшее S/n .

1. Пятеро рабочих 1 апреля получили на всех премию 1500000 евро. Каждый из них хочет купить себе машину ценой 320000 евро. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до зарплаты.

2. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок. А как можно усилить утверждение?

3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного сорта.

4. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

5. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11

6. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

7. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

8. Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

9. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

10. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

11. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

12. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трех клеток.

13. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

14. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера 1×1 метр, в котором нет ни одной дырки.

15. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

16.* Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками. То, что вам кажется очевидным, нужно обосновать :)

17.* Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

18.* Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Если в N клетках сидит не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k+1$ кролик.

Если сумма n чисел равна S , то среди них есть как число не большее S/n , так и число, не меньшее S/n .

1. Пятеро рабочих 1 апреля получили на всех премию 1500000 евро. Каждый из них хочет купить себе машину ценой 320000 евро. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до зарплаты.

2. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок. А как можно усилить утверждение?

3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного сорта.

4. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

5. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11

6. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

7. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

8. Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

9. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

10. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

11. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

12. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трех клеток.

13. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

14. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера 1×1 метр, в котором нет ни одной дырки.

15. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

16.* Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками. То, что вам кажется очевидным, нужно обосновать :)

17.* Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

18.* Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.