МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Принцип математической индукции: Утверждение относительно натурального числа n верно для любого значения n, если выполнены следующие два условия:
1) утверждение верно для $n = 1$
2) из справедливости утверждения при каком бы то ни было фиксированном натуральном значении $n = k$ вытекает его справедливость и при следующем натуральном значении $n = k + 1$

Замечание: Может оказаться, что утверждение относительно натурального n при некоторых начальных значениях n ошибочно, либо вообще не имеет смысла. Так, неравенство $2^n > n^2$ верно при всех $n \geqslant 5$ и ошибочно при $n = 2, 3, 4$. Утверждение о том, что сумма внутренних углов выпуклого n–угольника равна $2\pi(n-2)$, касается всех $n \geqslant 3$; значения $n = 1$ и $n = 2$ не относятся к делу. Подобные утверждения иногда также удается доказать методом математической индукции, но доказательство нужно начинать не со случая $n = 1$, а со случая $n = p$, где p — наименьшее из рассматриваемых натуральных значений.

1. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Докажите, что $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

3. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

4. Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

5. Упростите: $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n(2n-1)$.

6. Докажите, что число $n^3 + 5n$ при любом натуральном n делится на 6.

7. При каких значениях $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $2^n > 2n + 1$? Докажите.

8. Докажите, что банк может выдать любую сумму денег, начаная с восьми рублей, используя только 3-х и 5-рублевые купюры.

9. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

10. Докажите, что отрезок AB короче всякой ломаной, соединяющей точки A и B.

11. Найдите ошибку в доказательстве:
„Теорема“ При любом натуральном n число $2n + 1$ четное.
„Доказательство“ Пусть эта “теорема“ верна при $n = k$, то есть число $2k + 1$ четное. Докажем, что тогда число $2(k + 1) + 1$ также четно. Действительно, $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$. По предположению число $2k + 1$ четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. „Теорема“ доказана.

12. Найдите ошибку в доказательствах:
„Теорема“ Все натуральные числа равны между собой
„Доказательство1“ Будем доказывать, что любые n чисел равны между собой. **База индукции:** пусть у нас есть одно число. Очевидно, оно равно самому себе. **Предположение индукции:** пусть любые n чисел равны между собой. **Шаг индукции:** Пусть у нас есть $n + 1$ число. Выкинем из этого набора одно число, останется n чисел, а они равны между собой. Теперь вернем число, которое мы выкинули, и выкинем другое — останется n чисел. Число, которое мы выкинули, будет равно оставшимся, а потому все числа равны между собой.

„Доказательство2“ Будем доказывать, что если $max(a, b) = n$, где a и b натуральные, то $a = b$. **База индукции:** пусть $\max(a, b) = 1$. Тогда они оба равны 1. **Предположение индукции:** из $\max(a, b) = n$ следует $a = b$. **Шаг индукции:** пусть $\max(a, b) = n + 1$. Тогда $\max(a - 1, b - 1) = n$, значит, $a - 1 = b - 1$. Следовательно, $a = b$, что и требовалось доказать.

13. Докажите неравенство Бернулли:
$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx,$$
где $x \geqslant -1$, а n — произвольное натуральное число. ** Верно ли оно при других значениях x?

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Принцип математической индукции: Утверждение относительно натурального числа n верно для любого значения n, если выполнены следующие два условия:
1) утверждение верно для $n = 1$
2) из справедливости утверждения при каком бы то ни было фиксированном натуральном значении $n = k$ вытекает его справедливость и при следующем натуральном значении $n = k + 1$

Замечание: Может оказаться, что утверждение относительно натурального n при некоторых начальных значениях n ошибочно, либо вообще не имеет смысла. Так, неравенство $2^n > n^2$ верно при всех $n \geqslant 5$ и ошибочно при $n = 2, 3, 4$. Утверждение о том, что сумма внутренних углов выпуклого n–угольника равна $2\pi(n-2)$, касается всех $n \geqslant 3$; значения $n = 1$ и $n = 2$ не относятся к делу. Подобные утверждения иногда также удается доказать методом математической индукции, но доказательство нужно начинать не со случая $n = 1$, а со случая $n = p$, где p — наименьшее из рассматриваемых натуральных значений.

1. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Докажите, что $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

3. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

4. Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

5. Упростите: $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \cdots + (-1)^n(2n-1)$.

6. Докажите, что число $n^3 + 5n$ при любом натуральном n делится на 6.

7. При каких значениях $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $2^n > 2n + 1$? Докажите.

8. Докажите, что банк может выдать любую сумму денег, начаная с восьми рублей, используя только 3-х и 5-рублевые купюры.

9. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

10. Докажите, что отрезок AB короче всякой ломаной, соединяющей точки A и B.

11. Найдите ошибку в доказательстве:
„Теорема“ При любом натуральном n число $2n + 1$ четное.
„Доказательство“ Пусть эта “теорема“ верна при $n = k$, то есть число $2k + 1$ четное. Докажем, что тогда число $2(k + 1) + 1$ также четно. Действительно, $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$. По предположению число $2k + 1$ четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. „Теорема“ доказана.

12. Найдите ошибку в доказательствах:
„Теорема“ Все натуральные числа равны между собой
„Доказательство1“ Будем доказывать, что любые n чисел равны между собой. **База индукции:** пусть у нас есть одно число. Очевидно, оно равно самому себе. **Предположение индукции:** пусть любые n чисел равны между собой. **Шаг индукции:** Пусть у нас есть $n + 1$ число. Выкинем из этого набора одно число, останется n чисел, а они равны между собой. Теперь вернем число, которое мы выкинули, и выкинем другое — останется n чисел. Число, которое мы выкинули, будет равно оставшимся, а потому все числа равны между собой.

„Доказательство2“ Будем доказывать, что если $max(a, b) = n$, где a и b натуральные, то $a = b$. **База индукции:** пусть $\max(a, b) = 1$. Тогда они оба равны 1. **Предположение индукции:** из $\max(a, b) = n$ следует $a = b$. **Шаг индукции:** пусть $\max(a, b) = n + 1$. Тогда $\max(a - 1, b - 1) = n$, значит, $a - 1 = b - 1$. Следовательно, $a = b$, что и требовалось доказать.

13. Докажите неравенство Бернулли:
$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx,$$
где $x \geqslant -1$, а n — произвольное натуральное число. ** Верно ли оно при других значениях x?