

Об одной разновидности кузнечика Кронекера и особенностях его поведения.

Определение. Кузнечик Кронекера — зверь, прыгающий по кругу с постоянной длиной прыжка.

Науке известны две основные разновидности кузнечиков Кронекера. Кузнечик *иррациональный* — существо крайне непостоянное, но вездесущее: оно не попадает в одну точку дважды, но зато всюду плотно заполняет окружность. В отличие от него, *кузнечик рациональный* — существо крайне предсказуемое, зафиксированное на своих шагах. Иррациональным кузнечиков займемся позже, когда будем готовы, а пока изучим повадки кузнечика рационального.

Сюжет. Кузнечик прыгает по окружности длины 1 (пусть для определенности по часовой стрелке). Длина каждого его прыжка равна $\alpha > 0$. Точки в которых он побывал будем называть отмеченными.

Кузнечик рациональный. Пусть $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$. Тогда на окружности будет отмечено ровно q точек, которые разбивают окружность на q равных частей. Эти q точек кузнечек проскакивает в некотором порядке за p кругов, после чего зацикливается.

Принцип зацикливания. Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.

Принцип зацикливания назад (обратный ход). Если в условиях принципа зацикливания каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих, то система зацикливается без предпериода.

1. (о последних цифрах степеней)

- Найдите последнюю цифру числа 18^{2014} .
- Докажите, что последовательность последних цифр степеней произвольного натурального числа обязательно зацикливается.
- Докажите, что процесс при этом получается чисто периодический.
- Найдите какие могут получаться длины периодов. Попробуйте объяснить почему именно такие.

2. (о дробях десятичных и обыкновенных)

- Найдите 2014-ую цифру после запятой в десятичном разложении дроби $3/14$.
- Докажите, что при переводе обыкновенной дроби в десятичную, всегда получится периодическая десятичная дробь.
- От чего зависит будет дробь с предпериодом или без?
- От чего зависит длина периода? В каком случае достигается максимальная длина?

3. (о блужданиях двоечника)

- Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: "Я в комнате номер..." и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Студент-двоечник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.
- Докажите, что если в задаче про комнаты все записки указывают на разные комнаты, то школьник рано или поздно вернется в ту комнату, с которой начал.

-
- Последовательность натуральных чисел задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = s(a_n)^2 + 1$, где s — сумма цифр. Докажите, что эта последовательность периодична.
 - В последовательности $\{a_n\}$ $a_1 = 7$ и $a_{n+1} = a_n^3 + 3$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Найдется ли в ней число, делящееся на 8?
 - Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.
 - Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите что последовательность
 - периодична;
 - с периодом длины не больше 26;
 - меньше 17.
 - В тридцатом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево.
 - Докажите, что его маршрут зациклится.
 - Докажите, что он вернется в замок, из которого начинал движение.
 - В последовательности 20147247034412182... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр.
 - Доказать, что в этой последовательности снова встретится четверка 2014.
 - Встретится ли в этой последовательности четверка 2013?
 - Встретится ли в этой последовательности четверка 4981?
 - Государство Элмышатия всегда существовала и всегда будет существовать. Каждый день в государстве либо идет дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырехдневку. Всю поледнюю четырехдневку шел дождь. Докажите, что и до и после этого дождливых четырехдневок было бесконечно много.